オペレーションズリサーチ A –線形計画法–第5回

5 双対問題

標準型最小化問題 (LP) に対し, ラグランジュ緩和 (Lagrangian relaxation) を行うことにより, 双対問題の導出を行う.

$$\text{(LP)}\left|\begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array}\right.$$

ラグランジュ乗数ベクトル $\boldsymbol{y}^\top = (y_1, \ldots, y_m)$ を等式制約 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ にかけ, 同時に非負のラグランジュ乗数ベクトル $\boldsymbol{z}^\top = (z_1, \ldots, z_n) \geq 0$ を不等式制約 $\boldsymbol{x} \geq 0$ にかけて, 目的関数に組み込むことにより, 次の問題 (LR($\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$)) が得られる.

$$\text{(LR}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))\Big| \min \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}^\top(\boldsymbol{x} - 0) = (\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{y}^\top A - \boldsymbol{z}^\top)x + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$$

問題 (LP) の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ は, 問題 (LR($\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$)) の実行可能解であるため, $\boldsymbol{y}^\top(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0, \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{x} \geq 0$ であり, 問題 (LR($\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$)) の目的関数値は, 問題 (LP) の目的関数値を上回ることはない. しかも, 問題 (LR($\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$)) は問題 (LP) の制約 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を取り除いているため, 問題 (LP) の緩和問題となる. よって, 次の関係が得られる.

問題 (LR($\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$)) の目的関数の最適値 $\leq$ 問題 (LP) の目的関数の最適値

問題 (LR($\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$)) の変数 $\boldsymbol{x}$ に符号制約はないため, 目的関数における $\boldsymbol{x}$ の係数ベクトル ($\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{y}^\top A - \boldsymbol{z}^\top$) に 1 つでも非ゼロ成分があれば, 問題 (LR($\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$)) の目的関数値は $-\infty$ に発散する. よって, この問題は緩和問題として意味をなさなくなる. そのためラグランジュ乗数の値を $\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{y}^\top A - \boldsymbol{z}^\top = 0$ を満たすように制限する必要がある. このとき問題 (LR($\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$)) の目的関数は, $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$ となる. また, ラグランジュ乗数ベクトル $\boldsymbol{z}$ の非負性より, $\boldsymbol{z}^\top = \boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{y}^\top A \geq 0$ となる. 以上より, 問題 (LP) の最適目的関数値に対する最も大きな下界を与えるラグランジュ乗数 $\boldsymbol{y}$ を求めるには, 次の問題を解けばよい.

$$\text{(LP-dual)}\left|\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \end{array}\right.$$

この問題は $\boldsymbol{y}$ を双対変数とする (LP) の双対問題 (LP-dual) である. 双対変数 $\boldsymbol{y}$ には符号制約がない. ラグランジュ緩和問題 (LR(λ)) の導出において, $\boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$ でなく, $\boldsymbol{y}^\top(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$

を目的関数に加えても双対問題を導出することができる．この場合最終的に次の (LP-dual') が得られる．

$$
\text{(LP-dual')}\left|\begin{array}{rl} \max & -\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & -\boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \end{array}\right.
$$

(LP-dual') において, $\boldsymbol{y}$ には符号制約は無いため, $-\boldsymbol{y}$ を改めて $\boldsymbol{y}$ と置き換えると, (LP-dual) が得られる．

(LP) と (LP-dual) の両者を並べて再び示す．

$$
\text{(LP)}\left|\begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array}\right. \qquad \text{(LP-dual)}\left|\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \end{array}\right.
$$

問題 (LP) を主問題と呼び, (LP-dual) をその双対問題と呼ぶ．また, 問題 (LP-dual) の双対問題が問題 (LP) になることは容易に確認することができる．この 2 つの問題に成り立つ関係を示す．

定理 3 (弱双対定理)**.** 主問題 *(LP)* の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と, 双対問題 *(LP-dual)* の任意の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ に対して,

$$
\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}
$$

が成立する．

証明 (LP) の制約 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の左から $\boldsymbol{y}^\top$ を掛けると, $\boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$ となり, (LP-dual) の制約 $\boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top$ の右から $\boldsymbol{x}(\geq 0)$ を掛けると, $\boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ が得られる．よって $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$ が成立する． □

定理 3 より次の 2 つの系を示すことができる．

系 1. 問題 *(LP)* が無限解を持つなら, *(LP-dual)* は実行可能解を持たない．

系 2. 主問題 *(LP)* の実行可能解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ と, 双対問題 *(LP-dual)* の実行可能解 $\hat{\boldsymbol{y}}$ に対して,

$$
\boldsymbol{c}^\top \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b}
$$

が成立するならば, $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ はそれぞれ問題 *(LP)* と *(LP-dual)* の最適解である．

系 2 の条件が成り立つとき, $\boldsymbol{c}^\top \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b}$ を満たす $\hat{\boldsymbol{x}}$ と $\hat{\boldsymbol{y}}$ が存在することを保証する定理を示す．

定理 4 (双対定理)**.** 主問題 *(LP)* が最適解を持つ場合, 双対問題 *(LP-dual)* も最適解を持ち, *(LP)* における $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ の最小値と *(LP-dual)* における $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$ の最大値は一致する．

証明 (LP) が最適解を持つならば, (LP) に単体法を適用することによって最適基底解が得られる．これを $\boldsymbol{x}^*$ とし, 対応する基底行列を B とする．このとき, $A = (B, N)$, $\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{pmatrix}$ と分解表示する．$(\boldsymbol{y}^*)^\top = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}$ とすると, $\boldsymbol{y}^*$ は (LP-dual) の最適解となる

ことを示す．ここで, $\boldsymbol{y}^*$ の値は (LP) の最適基底 B に対する単体乗数 $\boldsymbol{\pi}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}$ と等しいということに注意されたい.

(LP) の最適基底解は $\boldsymbol{x}_B^* = B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_N^* = 0$ であり, (LP) の目的関数値は $\boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B^* + \boldsymbol{c}_N^\top \boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b}$ となる．(LP-dual) の目的関数値は $(\boldsymbol{y}^*)^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b}$ であるため, (LP) の目的関数の最小値と (LP-dual) の目的関数の最大値は一致する.

続いて, $\boldsymbol{y}^*$ が (LP-dual) の実行可能解であることを示す．実行可能であるための条件 $(\boldsymbol{y}^*)^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top$ を分解表示すると, $(\boldsymbol{y}^*)^\top (B, N) \leq (\boldsymbol{c}_B^\top, \boldsymbol{c}_N^\top)$ となる．これらを成分ごとに次のように表す.

$$(\boldsymbol{y}^*)^\top B \leq \boldsymbol{c}_B^\top$$
$$(\boldsymbol{y}^*)^\top N \leq \boldsymbol{c}_N^\top$$

$(\boldsymbol{y}^*)^\top = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}$ であるため, $(\boldsymbol{y}^*)^\top B = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1} B = \boldsymbol{c}_B^\top$ となり, 1 番目の条件は成り立つ．実行可能であるための 2 番目の条件は, $\boldsymbol{c}_B^\top B^{-1} N - \boldsymbol{c}_N^\top \leq 0$ である．この左辺は (LP) の単体基準 $\boldsymbol{p}$(あるいは被約費用 $\bar{\boldsymbol{c}}_N$ の (-1) 倍 $\boldsymbol{p} = -\bar{\boldsymbol{c}}_N$) $\boldsymbol{p}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1} N - \boldsymbol{c}_N^\top$ と等しくなる．基底 B は (LP) の最適基底であり, $\boldsymbol{p} \leq 0$ が成り立つため, $\boldsymbol{y}^*$ は (LP-dual) の実行可能解である. □

系 1,2, 定理 4 の結果を以下の表に示す．ただし, ◯は起こり得るケース, ×は起こり得ないケースを表す.

主問題 ＼ 双対問題		実行可能		実行不可能
		最適解あり	無限解	
実行可能	最適解あり	◯	×	×
	無限解	×	×	◯
実行不可能		×	◯	◯

次に, 標準型以外の線形計画問題における双対問題を考えよう．次の問題 (LP1) を主問題とすると, その双対問題は問題 (LP1-dual) となる．これは問題 (LP1) を標準型に変形することによって示すことができる.

$$\text{(LP1)}\quad \left|\begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array}\right. \qquad \text{(LP1-dual)}\quad \left|\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \\ & \boldsymbol{y} \geq 0 \end{array}\right.$$

問題 (LP1-dual) にスラック変数 $\boldsymbol{s} \geq 0$ を導入した標準型問題を (LP1') とし, その双対問題を (LP1-dual') とする.

$$\text{(LP1')}\quad \left|\begin{array}{rl} \min & (\boldsymbol{c}^\top, 0^\top) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \\ \text{subject to} & (A, -I) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq 0 \end{array}\right. \qquad \text{(LP1-dual')}\quad \left|\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^\top (A, -I) \leq (\boldsymbol{c}^\top, 0^\top) \end{array}\right.$$

(LP1-dual') は (LP1-dual) と等しいことがわかる．従って, (LP1) の双対問題は (LP1-dual) となる．(LP1') の目的関数は $\boldsymbol{s}$ に関する項を含まないため, 系 2 における条件 $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + 0^\top \boldsymbol{s} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$ となり, 系 2 は (LP1) と (LP1-dual) においてもそのまま成立することに注意されたい．また, (LP1) と (LP1-dual) においては, 定理 4 も同様に成り立つ.

定理 5 (相補スラック定理)**.** 主問題 *(LP1)* の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と, 双対問題 *(LP1-dual)* の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ がそれぞれ *(LP1)* と *(LP1-dual)* の最適解であるための必要十分条件は,

$$(\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{y}^\top A)\boldsymbol{x} = 0$$

$$\boldsymbol{y}^\top (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0$$

が成立することである.

証明 $(\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{y}^\top A)\boldsymbol{x} = 0$ と $\boldsymbol{y}^\top(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0$ が成り立つならば, $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$ となるため, 系 2 より, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はそれぞれ, (LP1) と (LP1-dual) の最適解である. 逆に, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ をそれぞれ, (LP1) と (LP1-dual) の最適解とする. このとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} &\leq \boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{y} \geq 0 \text{ であるため}) \\ &\leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の最適性から, 定理 4 より $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ が成り立つため, 上の不等式は全て等号で満たされなければならない. よって, $(\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{y}^\top A)\boldsymbol{x} = 0$ と $\boldsymbol{y}^\top(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0$ が成り立つ. □

双対問題の意味　製造業 D 社は資源 $R_j, j = 1, \ldots, n$ を所有し, これを加工して商品 $G_i, i = 1, \ldots, m$ を生産している. 商品 G_i を 1 単位生産するために必要な資源 R_j の使用量を a_{ij} とし, 資源 R_j の利用可能量を c_j とする. 商品 G_i を 1 単位売却する場合の利益を b_i とする. 商品 G_i の販売量を, 変数 y_i と定める. このとき, D 社の生産計画として, 総利益を最大化する問題 (LP1-dual) が定式化でき, 同時にその双対問題 (LP1) を示す.

$$\text{(LP1)} \left| \begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array} \right. \qquad \text{(LP1-dual)} \left| \begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \\ & \boldsymbol{y} \geq 0 \end{array} \right.$$

双対問題 (LP1) は次のように解釈できる. 総合商社 P 社は D 社が保有する資源 $R_j, j = 1, \ldots, n$ を購入することを計画している. 資源 R_j の 1 単位当たりの購入価格を変数 x_j と定める. P 社が D 社から資源を購入できるための条件は次のようになる. D 社にとって, 商品 G_i を売却することにより得られる利益よりも資源売却により得られる収入の方が高くなければ, 資源売却に応じないはずである. よって $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i = 1, \ldots, m$ でなければならない. これは (LP1) の制約式を表す. P 社の目的関数は資源の購入費用であり, これを最小化するような資源の購入計画が (LP1) である.

(LP1) と (LP1-dual) の最適解をそれぞれ, $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*$ とすると, 定理 4 より, $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{y}^*)^\top \boldsymbol{b}$ が成り立つ. これより, 資源 R_j の利用可能量の値が c_j から $c_j + \Delta c_j, \Delta c_j > 0$ へと変化したとする. そのとき, D 社の総利益は $\Delta c_j x_j^*$ だけ増加する. よって, x_j^* は資源 R_j の潜在価格 (シャドウ・プライス) と呼ばれる.

6　凸多面集合の性質

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in \Re^n, 0 \leq \lambda \leq 1$ であるとき, $\lambda \boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2$ を $\boldsymbol{x}^1$ と $\boldsymbol{x}^2$ の凸結合という. $S \subset \Re^n$ は, S の任意の 2 点 $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$ の凸結合を含むとき, すなわち

$$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in \Re^n, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2 \in S$$

を満たすとき, 凸集合であるという. また, 凸集合 S は,

$$\boldsymbol{x} \in S, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x} \in S$$

であるとき, 凸錐と呼ばれる. ある 0 でないベクトル $\alpha \in \Re^n$ と $\alpha_0 \in \Re^1$ に対して定義される集合

$$H_0 = \{\boldsymbol{x} \in \Re^n | \alpha^\top \boldsymbol{x} = \alpha_0\}$$

を超平面といい,

$$H_- = \{\boldsymbol{x} \in \Re^n | \alpha^\top \boldsymbol{x} \geq \alpha_0\}$$

を (超平面 H_0 で区切られる) 半空間という. 有限個の半空間と超平面の共通部分として定義される集合は凸集合であり, 凸多面集合と呼ばれる. また有界な凸多面集合を凸多面体と呼ぶ. 標準型線形計画問題 (LP) の実行可能解集合 $\{\boldsymbol{x} \in \Re^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$ も, 容易に確かめられるように凸集合である.

凸集合 S の点 $\boldsymbol{x}$ は, S に含まれる相異なる 2 点 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in S$ を結ぶ開線分 $(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)$ 上の点にならないとき, すなわち,

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2, 0 < \lambda < 1 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^2$$

という関係が成り立つとき, $\boldsymbol{x}$ を S の頂点 (端点) という.

定理 6. 標準型線形計画問題 *(LP)* の実行可能解集合を $X = \{\boldsymbol{x} \in \Re^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$ とすると, 実行可能基底解は X の端点である.

証明　簡単のため $\mathrm{rank} A = m$ とする. $\mathrm{rank} A < m$ の場合も証明は同様にできる. $\hat{\boldsymbol{x}}$ を X の実行可能基底解であるとし, 一般性を失わずに $x_1, \ldots, x_m$ が基底変数であるものとする. すなわち, $\hat{x}_1 \geq 0, \ldots, \hat{x}_m \geq 0$, $\hat{x}_{m+1} = 0, \ldots, \hat{x}_n = 0$ と仮定する. 行列 A の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ と書くと, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は線形独立であり,

$$\boldsymbol{a}_1 \hat{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_m \hat{x}_m = \boldsymbol{b}$$

を満たす. そこで X に属する $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2$ と $0 < \lambda < 1$ に対して,

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \lambda \boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2$$

と書けたとする, すなわち $\hat{\boldsymbol{x}}$ が $\boldsymbol{x}^1$ と $\boldsymbol{x}^2$ の凸結合で表すことができるとする. このとき, $\hat{\boldsymbol{x}}$ の $m+1, \ldots, n$ 成分は 0, すなわち

$$0 = \hat{x}_j = \lambda x_j^1 + (1-\lambda)x_j^2, x_j^1 \geq 0, x_j^2 \geq 0$$

となるが, $\boldsymbol{x}^1$ と $\boldsymbol{x}^2$ の $m+1,\ldots,n$ 成分は非負であるため,

$$x_j^1 = x_j^2 = 0, j = m+1,\ldots,n$$

でなければならない. これと $A\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{b}$ より, 次の関係が得られる.

$$\boldsymbol{a}_1 x_1^1 + \ldots + \boldsymbol{a}_m x_m^1 = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{a}_1 x_1^2 + \ldots + \boldsymbol{a}_m x_m^2 = \boldsymbol{b}$$

これを辺々差し引くと, 次のようになる.

$$\boldsymbol{a}_1(x_1^1 - x_1^2) + \ldots + \boldsymbol{a}_m(x_m^1 - x_m^2) = \boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ は線形独立であるから,

$$x_1^1 - x_1^2 = 0,\ldots,x_m^1 - x_m^2 = 0$$

すなわち $x_j^1 = x_j^2 = 0, j = 1,\ldots,m$ となる. よって, $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^2$ が示され, $\hat{\boldsymbol{x}}$ が異なる 2 点の凸結合で示すことはできないため, 実行可能基底解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ は X の端点である. □

椎名 孝之
千葉工業大学 社会システム科学部 経営情報科学科
〒 275-0016 千葉県習志野市津田沼 2-17-1
E-mail: shiina.takayuki@it-chiba.ac.jp